COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun aux ENS d'Ulm, Lyon et Cachan

DURÉE : 3 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé pour toutes les épreuves d'admissibilité, sauf pour les épreuves de français et de langues. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Les deux parties du problème sont indépendantes ; dans la première partie les trois modèles peuvent être abordés dans un ordre indifférent. Leur étude n'utilise que les résultats énoncés dans la question 2. de la première partie.

On rappelle que si X est une variable aléatoire réelle, E (X) désigne, quand elle existe, l'espérance de X.

Soit $(Y_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles positives ou nulles définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour tout réel $a \geq 0$, on note $N(a)$ le nombre de variables Y_n dont la valeur est dans l'intervalle $[0, a]$. On désire étudier dans certains cas la variable aléatoire $N(a)$. Dans une première partie la suite (Y_n) est telle que la suite $(Y_n - Y_{n-1})_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles positives ou nulles, indépendantes, et de même loi.

Dans une seconde partie, la suite (Y_n) est construite de telle sorte que jusqu'à un certain instant (pouvant être aléatoire), elle soit constituée de variables aléatoires positives ou nulles, indépendantes, de même loi uniforme, et qu'après cet instant les valeurs de Y_n n'influent pas sur la valeur de $N(a)$.

PREMIÈRE PARTIE

1. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante de réels positifs ou nuls, avec $a_0 = 1$.

   a. Indiquez les raisons pour lesquelles la suite (a_n) converge vers une limite $0 \leq l \leq 1$.
   Montrez que la série de terme général $a_{n-1} - a_n$ $(n \geq 1)$ converge et a pour somme $S = 1 - l$.

   b. Montrez que si la série de terme général na_n converge, il en est de même pour la série de terme général a_n, ainsi que pour la série de terme général $n(a_{n-1} - a_n)$. Montrez que l'on a alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} - a_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n .$$

2. On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles positives ou nulles indépendantes et de même loi, définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit alors $Y_0 = 0$, $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ pour tout entier $n \geq 1$. On note pour tout $n \geq 0$, F_n la fonction de répartition de Y_n, à savoir :

$$F_n(a) = P(Y_n \leq a) \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

a. Montrez que pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, la suite $(F_n(a))_{n\geq 0}$ est décroissante avec $F_0(a) = 1$.

b. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, soit $N(a)$ le nombre de Y_n dont la valeur est dans $[0, a]$ (ce nombre pouvant être éventuellement égal à $+\infty$).

Montrez alors que l'on a, pour tout $n \geq 1$,

$$P(N(a) = n) = F_{n-1}(a) - F_n(a),$$

puis en utilisant le préliminaire, montrez que :

$$P(N(a) < \infty) = 1$$

est équivalent à :

$$F_n(a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

c. On suppose que la série de terme général $n F_n(a)$ converge.

Montrez que $P(N(a) < \infty) = 1$. La variable aléatoire $N(a)$ peut alors être considérée à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrez que $E(N(a))$ existe et est égale à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} F_n(a).$$

3. *Le modèle de Bernoulli.*

Dans cette partie on considère le cas particulier où la loi de X_n est, pour tout $n \geq 1$, une loi de Bernoulli de paramètre p, $0 < p < 1$.

a. Quelle est alors, pour tout $n \geq 1$, la loi de Y_n ?

Écrire pour tout k entier positif ou nul, pour tout n entier positif ou nul, l'expression de $F_n(k)$.

b. Montrez que pour tout $k \geq 0$, $F_n(k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, et que la série de terme général $n F_n(k)$ converge.

c. Montrez que l'on a pour tout $k \geq 0$, entier :

$$E(N(k)) = k + \sum_{n=k}^{+\infty} F_n(k),$$

puis calculez $E(N(0))$, $E(N(1))$.

d. A partir du développement en série entière de $(1-x)^\alpha$, α réel quelconque, trouvez la valeur explicite de :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k x^{n-k}, \quad \text{pour } 0 < x < 1,$$

k entier positif ou nul quelconque.

e. En utilisant le résultat de la question précédente, montrez que l'on a :

$$E(N(k+1)) = E(N(k)) + \frac{1}{p} \quad \text{pour tout } k \geq 0.$$

En déduire la valeur de $E(N(k))$ pour tout entier $k \geq 0$.

4. *Le modèle géométrique.*

On considère le cas où la loi de X_n est, pour tout $n \geq 1$, définie par :

$$P(X_n = k) = (1 - a)\, a^k$$

pour tout entier $k \geq 0$, où a est un réel fixé strictement compris entre 0 et 1.

a. Calculez la fonction génératrice de X_1, puis celle de Y_n pour tout entier $n \geq 1$. En déduire que pour tout $n \geq 1$, pour tout $k \geq 0$, on a :

$$P(Y_n = k) = \alpha_{n,k}(1 - a)^n a^k,$$

où $\alpha_{n,k}$ est un réel que l'on déterminera.

b. Montrez que $E(N(k))$ existe pour tout entier $k \geq 0$.

Calculez $E(N(0))$, puis pour tout entier $k \geq 1$, $E(N(k))$ en fonction de $E(N(k-1))$.

En déduire la valeur de $E(N(k))$ pour tout entier $k \geq 0$.

5. *Le modèle exponentiel.*

On considère maintenant le cas particulier où la loi de X_n est, pour tout $n \geq 1$, une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a. Calculez alors la densité de la loi de Y_2, puis par récurrence montrez que la densité de la loi de Y_n est, pour tout $n \geq 1$, égale à $f_n(x)$ où :

$$f_n(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \text{ pour } x > 0, \qquad 0 \text{ pour } x \leq 0.$$

Donnez pour $a \geq 0$ l'expression de $F_n(a)$ sous forme d'une intégrale définie qu'on ne cherchera pas à calculer.

b. Calculez pour tout $n \geq 1$, $F_{n-1}(a) - F_n(a)$.

En déduire la valeur de $P(N(a) = n)$, pour tout entier $n \geq 1$. Montrez alors que $N(a) - 1$ suit une loi classique que l'on déterminera ; en déduire les valeurs de $E(N(a))$ et $\sigma^2(N(a))$ (variance de $N(a)$).

SECONDE PARTIE

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes, de même loi uniforme sur $[0, 1]$. Soit a un réel, $0 < a \leq 1$.

1. Soit n un entier strictement positif. On note :

$$Y_k = X_k \qquad \text{si } k < n$$
$$Y_k = 2 \qquad \text{si } k \geq n$$

et $N_n(a)$ le nombre de Y_k dont la valeur est dans l'intervalle $[0, a]$.

Quelle est alors la loi de $N_n(a)$? Donnez la valeur de $E(N_n(a))$.

2. Soit Z une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, indépendante de la suite $(X_n)_{n \geq 0}$.

On définit alors, pour tout entier $k \geq 0$, la variable aléatoire $\widetilde{Y}_k$ par :

$$\widetilde{Y}_k(\omega) = X_k(\omega) \text{ si } Z(\omega) > k$$
$$= 2 \quad \text{si } Z(\omega) \leq k.$$

De même $\widetilde{N}(a)$ désigne le nombre de $\widetilde{Y}_k$ dont la valeur est dans l'intervalle $[0, a]$.

i. Montrez les égalités :

$$P(\widetilde{N}(a) = 0) = P(Z = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(N_n(a) = 0)\, P(Z = n)$$

$$P(\widetilde{N}(a) = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(N_n(a) = k)\, P(Z = n) \quad \text{pour tout } k \geq 1.$$

En déduire que $\widetilde{N}(a)$ suit une loi de Poisson de paramètre λa, ceci pour tout $0 < a \leq 1$.

ii. Soit pour tout $\omega \in \Omega$, $(T_n(\omega))$ la suite obtenue à partir de la suite $(\widetilde{Y}_n(\omega))$ en ordonnant cette suite de manière croissante.

Montrez alors que l'on a, pour tout $m \geq 1$, $0 < a \leq 1$,

$$P(T_m \leq a) = P(\widetilde{N}(a) \geq m).$$

En déduire que :

$$P(T_m \leq a) = \int_0^{\lambda a} \frac{t^{m-1} e^{-t}}{(m-1)!}\, dt.$$

Que vaut enfin la fonction de répartition de T_m, soit $G_m(x)$, pour $x \notin [0, 1[$?

(On pourra faire intervenir dans le résultat $\displaystyle\int_0^{\lambda} \frac{t^{m-1} e^{-t}}{(m-1)!}\, dt$, qu'on ne cherchera pas à calculer.)

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail